Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

dysleksja ☐

MMA-P1A1P-062

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz I

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

ARKUSZ I

MAJ ROK 2006

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (*3 pkt*)

Dane są zbiory: $A = \{x \in R:\ |x-4| \geq 7\}$, $B = \{x \in R:\ x^2 > 0\}$. Zaznacz na osi liczbowej:

a) zbiór A,
b) zbiór B,
c) zbiór $C = B \setminus A$.

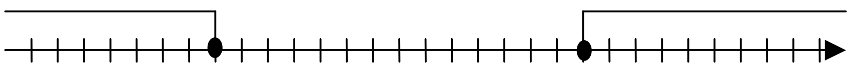
a)

Zapisuję nierówność $|x-4| \geq 7$ *w postaci alternatywy nierówności*:

$x-4 \leq -7$ *lub* $x-4 \geq 7$ *i rozwiązuję każdą z nich.*

$x \leq -3$ *lub* $x \geq 11$ *.*

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór A.

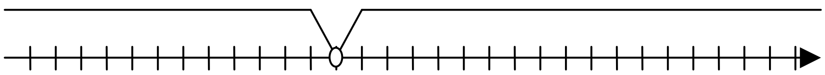


b)

Rozwiązuję nierówność $x^2 > 0$.

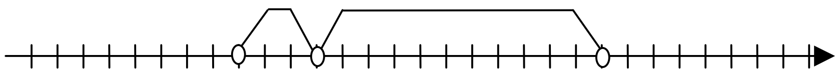
$x \neq 0$

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór B.



c)

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór C.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	1.1.	1.2.	1.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 2. ***(3 pkt)***

W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

Ω *jest zbiorem wszystkich trzyelementowych podzbiorów zbioru szesnastoelementowego.*

Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, więc korzystam z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Obliczam, na ile sposobów można wybrać trzy osoby spośród 16:

$$|\Omega| = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 560$$

Zdarzenie A – wśród trzech wybranych osób będą dwie, które znają okolicę i jedna, która okolicy nie zna.

Obliczam, na ile sposobów można wybrać trzy osoby, wśród których będą dwie znające okolicę i jedna, która okolicy nie zna: $|A| = \binom{4}{2}\binom{12}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 12 = 72$.

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{72}{560} = \frac{9}{70}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	2.1.	2.2.	2.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 3. (*5 pkt*)

Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła (w dag)	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.
b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.

Obliczam średnią masę kostki masła:

$$\overline{x} = \frac{16\cdot 1 + 18\cdot 15 + 19\cdot 24 + 20\cdot 68 + 21\cdot 26 + 22\cdot 16}{150} = 20.$$

Obliczam wariancję:

$$\sigma^2 = \frac{1\cdot 4^2 + 15\cdot 2^2 + 24\cdot 1^2 + 68\cdot 0^2 + 26\cdot 1^2 + 16\cdot 2^2}{150} = \frac{19}{15}.$$

Obliczam odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{19}{15}} \approx 1{,}125.$

Odp.: *Kontrola zakładu nie wypadła pozytywnie, ponieważ odchylenie standardowe przekroczyło 1 dag.*

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator!</td><td>Nr czynności</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>3.3.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.

a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
b) Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
c) Oblicz wyraz a_6.

Wyznaczam iloraz ciągu geometrycznego: $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$;

stąd $q = \frac{3}{2}$ *lub* $q = -\frac{3}{2}$.

Odrzucam odpowiedź $q = -\frac{3}{2}$ *, ponieważ* $a_1 > 0$ *i ciąg jest rosnący.*

wniosek: ilorazem tego ciągu jest $q = \frac{3}{2}$.

Wyznaczam wzór na a_n: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Obliczam a_6: $a_6 = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 91\frac{1}{8}$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	4.1.	4.2.	4.3.
	Maks. liczba pkt	2	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 5. (*3 pkt*)

Wiedząc, że $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$, $\sin\alpha < 0$ oraz $4\operatorname{tg}\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

a) oblicz $\operatorname{tg}\alpha$,

b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

Obliczam tangens kąta α z podanego równania:

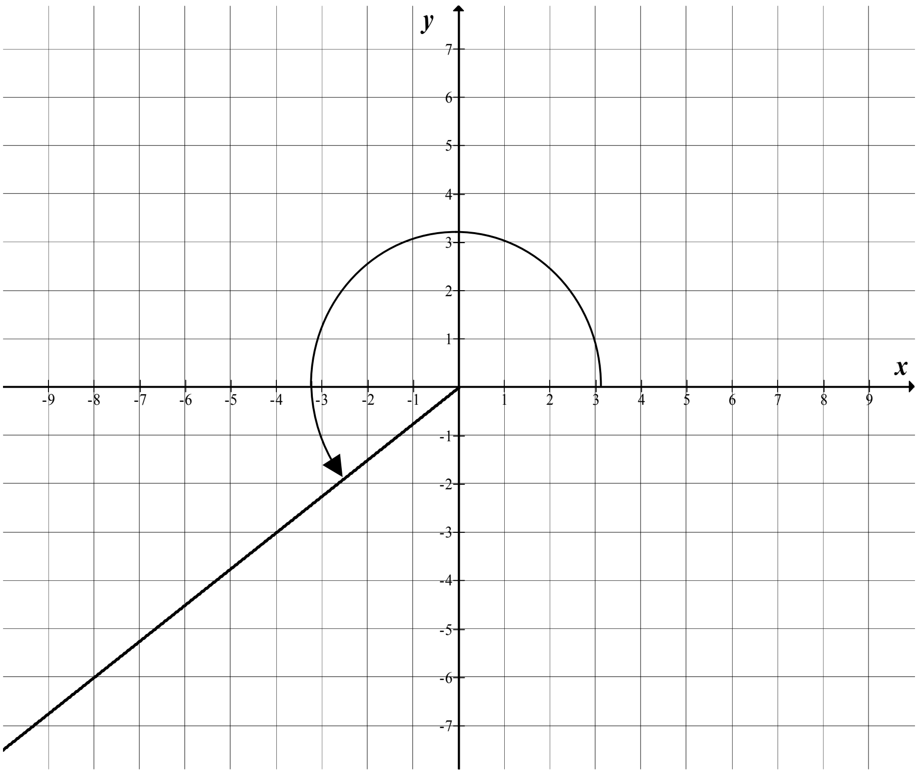
$$4\operatorname{tg}\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha,$$

$$4\operatorname{tg}\alpha = 3\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right).$$

Korzystam z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *i otrzymuję:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

Zaznaczam w układzie współrzędnych kąt α.

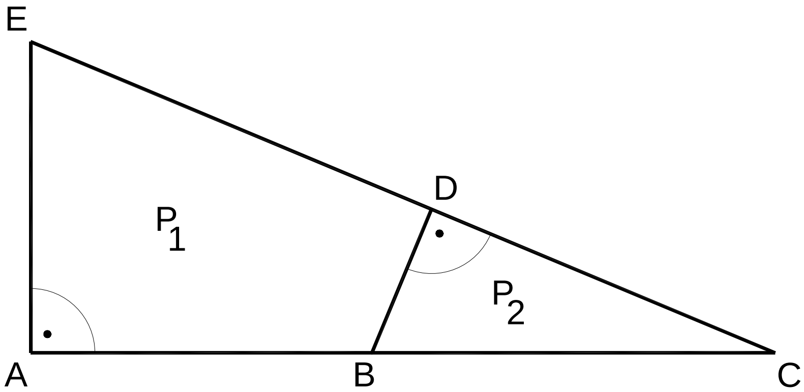


Punkt $(-4,-3)$ *leży na końcowym ramieniu szukanego kąta.*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	5.1.	5.2.	5.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 6. (*7 pkt*)

Państwo Nowakowie przeznaczyli 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1:1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2.



$|AE| = 5$ cm,
$|EC| = 13$ cm,
$|BC| = 6{,}5$ cm.

Trójkąty ACE i DCB są podobne.

Z twierdzenia o polach figur podobnych otrzymuję zależność: $\dfrac{P_2}{P_{\Delta ACE}} = k^2$,

gdzie k jest skalą podobieństwa trójkątów.

Wyznaczam skalę podobieństwa k: $k = \dfrac{|BC|}{|EC|} = \dfrac{6{,}5}{13} = \dfrac{1}{2}$.

Wyznaczam zależność między polami trójkątów podobnych P_2 *i* $P_{\Delta ACE}$:

$P_2 = k^2 \cdot P_{\Delta ACE}$, *stąd* $P_2 = \dfrac{1}{4} \cdot P_{\Delta ACE}$.

Obliczam długość odcinka AC z trójkąta AC: $|AC| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ cm$.

Obliczam pole trójkąta ACE (na rysunku): $P_{\Delta ACE} = 30\ cm^2$.

Obliczam pole działki P_2 *(na rysunku):* $P_2 = \dfrac{1}{4} P_{\Delta ACE} = 7{,}5\ cm^2$.

Obliczam pole działki P_2 *w rzeczywistości:* $P_2 = 7{,}5\ cm^2 \cdot (1000)^2 = 750\ m^2$.

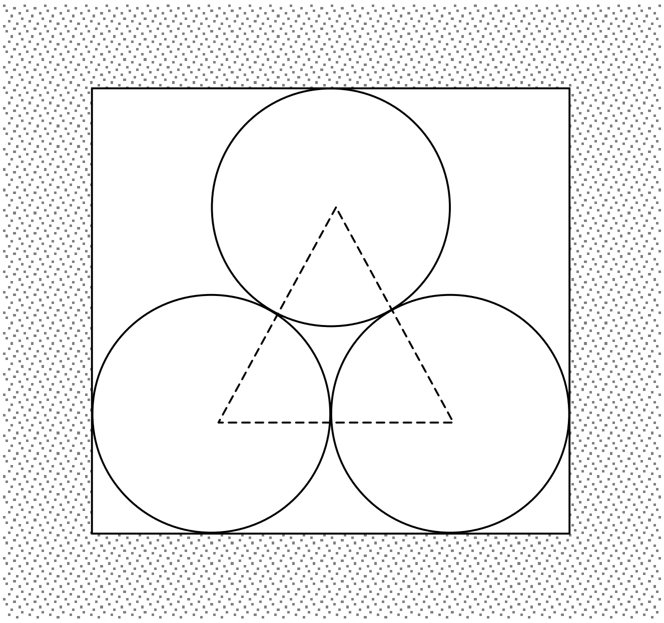
Obliczam koszt zakupu działki P_2: $750 \cdot 35 = 26250$ *zł.*

Odp.: Przeznaczona kwota nie wystarczy na zakup tej działki, zabraknie 250 zł.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	6.5.	6.6.	6.7.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt							

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do 0,01 m.



Środki okręgów na przedstawionym w zadaniu szkicu są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości $a = 1$.

Obliczam wysokość tego trójkąta: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Obliczam wysokość kanału ciepłowniczego: $d = 2r + h$, $d = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Odp.: Wysokość kanału z zadanym zaokrągleniem jest równa $d \approx 1{,}87\ m$

a jego szerokość $s = 2\ m$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 8. (*5 pkt*)

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

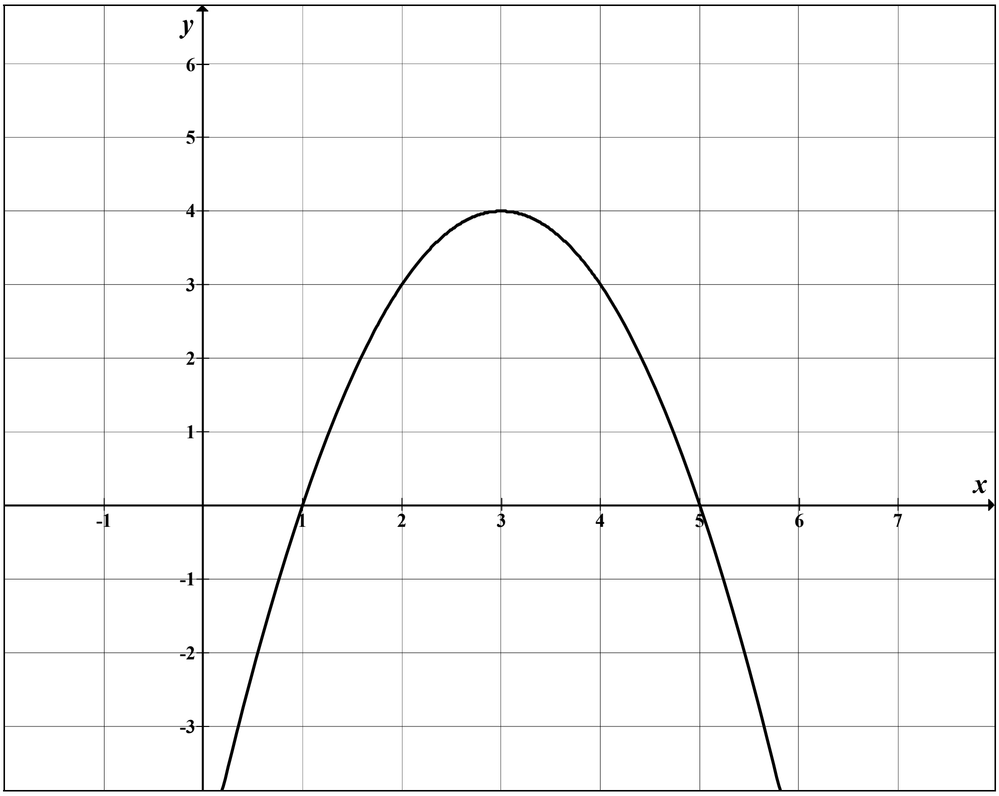
Wyznaczam współrzędne wierzchołka paraboli:

$p = \frac{-b}{2a}$; $p = \frac{-6}{-2} = 3$,

$\Delta = 16$; $q = \frac{-\Delta}{4a}$, $q = \frac{-16}{-4} = 4$

stąd $W = (3,4)$.

Wyznaczam miejsca zerowe funkcji: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.



Zbiór wartości funkcji: $\left(-\infty, 4\right\rangle$.

Rozwiązaniem nierówności $f(x) \geq 0$ *są wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału* $\langle 1, 5 \rangle$.

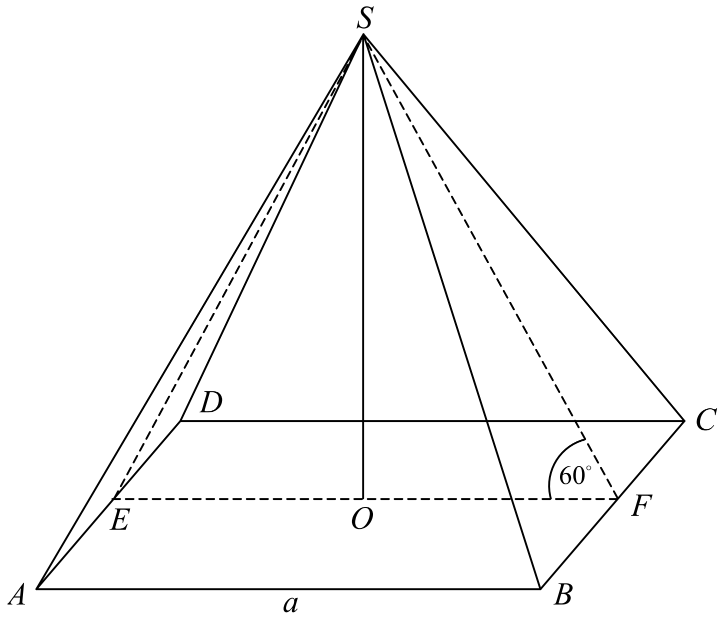
Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	8.1.	8.2.	8.3.	8.4.	8.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 9. (*6 pkt*)

Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.

a) Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.

b) Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia $1\ \mathrm{m}^2$ potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: $a = |AB| = 4\ m$.

Trójkąt EFS jest równoboczny.

Wysokość ściany bocznej $|SF| = 4\,m$.

Obliczam pole powierzchni dachu:

$$P = 4 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 32\ m^2.$$

Obliczam liczbę dachówek bez uwzględniania zapasu:

$32 \cdot 24 = 768$ *sztuk.*

Obliczam, ile dachówek należy kupić, uwzględniając zapas:

$108\% \cdot 768 = 829{,}44$.

Odp.: Należy kupić 830 sztuk dachówek.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	9.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 10. (*6 pkt*)

Liczby 3 i -1 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$.

a) Wyznacz wartości współczynników a i b.
b) Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Do rozwiązania zadania wykorzystuję twierdzenie Bézouta.

$W(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a + 3b + 84 = 0$,

$W(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + 28 = 0$.

Rozwiązuję układ równań: $\begin{cases} 9a + 3b + 84 = 0 \\ a - b + 28 = 0 \end{cases}$

$a = -14$, $b = 14$.

Podstawiam obliczone wartości współczynników a, b i zapisuję wielomian

$W(x) = 2x^3 - 14x^2 + 14x + 30$.

Wielomian $W(x)$ *dzielę przez* $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$:

$(2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 2x - 3) = 2x - 10$.

Obliczam trzeci pierwiastek: $2x - 10 = 0$

$$x = 5.$$

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator!</td><td>Nr czynności</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>10.3.</td><td>10.4.</td><td>10.5.</td><td>10.6.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Sumę $S=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{301\cdot 304}+\frac{3}{304\cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:

a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S=\frac{4-1}{4\cdot 1}+\frac{7-4}{7\cdot 4}+\frac{10-7}{10\cdot 7}+\ldots+\frac{304-301}{304\cdot 301}+\frac{307-304}{307\cdot 304}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S=\left(\frac{4}{4\cdot 1}-\frac{1}{4\cdot 1}\right)+\left(\frac{7}{7\cdot 4}-\frac{4}{7\cdot 4}\right)+\left(\frac{10}{10\cdot 7}-\frac{7}{10\cdot 7}\right)+\ldots+\left(\frac{304}{304\cdot 301}-\frac{301}{304\cdot 301}\right)+\left(\frac{307}{307\cdot 304}-\frac{304}{307\cdot 304}\right)$$

stąd $S=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{301}-\frac{1}{304}\right)+\left(\frac{1}{304}-\frac{1}{307}\right)$

więc $S=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{301}-\frac{1}{304}+\frac{1}{304}-\frac{1}{307}$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$$S=1-\frac{1}{307}=\frac{306}{307}.$$

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę $S_1=\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{281\cdot 285}$.

Zapisuję sumę S_1 *w postaci:* $S_1=\frac{5-1}{5\cdot 1}+\frac{9-5}{9\cdot 5}+\frac{13-9}{13\cdot 9}+\ldots+\frac{285-281}{285\cdot 281}$.

Zapisuję każdy składnik sumy w postaci różnicy ułamków:

$$S_1=\left(\frac{5}{5\cdot 1}-\frac{1}{5\cdot 1}\right)+\left(\frac{9}{9\cdot 5}-\frac{5}{9\cdot 5}\right)+\left(\frac{13}{13\cdot 9}-\frac{9}{13\cdot 9}\right)+\ldots+\left(\frac{285}{285\cdot 281}-\frac{281}{285\cdot 281}\right)$$

stąd $S_1=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{281}-\frac{1}{285}\right)$

więc $S_1=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{281}-\frac{1}{285}$.

Obliczam sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim:

$$S_1=1-\frac{1}{285}=\frac{284}{285}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	11.1.	11.2.	11.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

BRUDNOPIS